Spezialthema Komplexe Zahlen – Fragen

Lukas Prokop

31. Mai 2009

Dank an
Prof. Egger

"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles weitere ist Menschenwerk"
(Leopold Kronecker[1])

[1]frei zitiert nach H. Weber "Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 2", 1886

1 Was ist eine Komplexe Zahl und wie hat sie sich geschichtlich entwickelt?

Lösung von Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$, definiert durch $i^2 = -1$, Realteil und Imaginärteil, Cardano, Bombelli, Vieta, Euler, Gauß

2 Gib Gründe für die Anerkennung der Komplexen Zahlen als Zahlen an

1. analoge Arithmetik
2. Lösung von Gleichungen (algebraische Abgeschlossenheit)
3. Darstellung auf Gaußscher Zahlenebene
4. Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion

3 Wie kann eine Komplexe Zahl dargestellt werden

Entweder binomial ($a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$) oder polar (Winkel und Betrag). Wenn polar, dann trigonometrische Form, Exponentialform oder Versorform

4 Gibt es inverse Werte?

Für zwei Elemente a, b einer Menge M muss gelten ($a, b \in M$):

$$a + b = 0 \tag{1}$$

$$a \cdot b = 1 \tag{2}$$

(1) b ist das das additiv inverse Element von a
(2) b ist ein das multiplikativ inverse Element von a
Für komplexe Zahlen gilt ($a, b \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$):

$$\begin{gathered} z + (-1) \cdot z = 0 \\ (a + bi) + (-a - bi) = 0 \\ z \cdot z^{-1} = 1 \\ (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}\right) = 1 \\ \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{abi}{a^2 + b^2} - \frac{abi}{a^2 + b^2} - \frac{b^2 i^2}{a^2 + b^2} = 1 \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$$
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$
$$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\cdot\frac{b}{a^2+b^2} \tag{4}$$

(3) das additiv inverse Element von z ist $-z$ (inverser Imaginär- und Realteil)
(4) das multiplikativ inverse Element von z ist z^{-1} (siehe 4. Satz)

5 Gibt es neutrale Werte?

Für zwei Elemente a, b einer Menge M muss gelten $(a, b \in M)$:

$$a\cdot b = a \tag{5}$$

(5) b ist ein neutraler Wert
Für Komplexe Zahlen gilt $(z \in \mathbb{Z})$:

$$z\cdot 1 = z \tag{6}$$

(6) die Komplexen Zahlen verwenden das selbe neutrale Element wie die natürlichen, ganzen und (ir)rationalen Zahlen. Bedenke das gilt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

6 Erkläre die verschiedenen Begriffe und gehe auf die imaginäre Einheit näher ein

Imaginäre Einheit definiert als $i = \sqrt{-1}$, Zahl der Struktur $b\cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ ist eine "imaginäre Zahl", Zahl der Struktur $a + b\cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist eine "Komplexe Zahl", Variable i wird in Elektrotechnik mit j angeschrieben (wegen Stromstärke i), Komplexe Zahl aber auch über Polarkoordinaten darstellbar (mit Winkel φ und Betrag $|z|$), Gaußsche Zahlenebene besteht aus zwei Achsen (waagrecht Realteil und senkrecht Imaginärteil), Komplexe Zahlen nicht auf Zahlenstrahl darstellbar, konjugiert Komplexe einer Komplexen Zahl hat einen invertierten Imaginärteil, $cis\varphi$ ist Kurzform für $(\cos\varphi + i\cdot \sin\varphi)$

7 Erkläre die Polarform von Komplexen Zahlen

Auffassung, dass eine Zahl durch einen Winkel und eine Länge eindeutig identifizierbar ist, eine Komplexe Zahl entspricht auf der Gaußschen Zahlenebene einem Punkt, Punkt entweder über Längen auf Achsen ansprechbar (Binomialform) oder über Einschlagwinkel und die Länge. Für die Umrechnung gilt:

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

8 Erkläre den Zusammenhang zwischen der Polardarstellung von Komplexen Zahlen und der kartesischen Binomialform

Es besteht ein trigonometrischer Zusammenhang. Es lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck zwischen dem Punkt, der Realachse und der Länge $|z|$ im Winkel φ aufspannend. Für dieses Dreieck gelten die Definition des Tangens und der Satz des Pythagoras (siehe vorige Frage)

9 Welche Auswirkungen hat die imaginäre Einheit auf die binomischen Formeln?

Durch das Auflösen von i^2 wird der 3. Summand vom restlichen Term abgezogen. Zum Beispiel...

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

10 Was versteht man unter der Eulerschen Identität?

Die Formel ...

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot \sin\varphi$$

Für $\varphi = \pi$ gilt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

11 Begründe die wohl interessanteste Formel der Welt: $e^{\pi i} + 1 = 0$

$e^{\pi i} + 1 = 0$ ist ein Spezialfall von ...

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot \sin\varphi$$

unter der Bedingung $\varphi = \pi$ (π entspricht als Radiant in Grad 180°).

$$e^{i\pi} = \cos 180° + i \sin 180°$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Die Eulersche Identität ist über Taylorreihen und Konvergenzen herleitbar.
Für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ gilt (siehe Maclaurin-Reihe):

$$\sin\varphi = \frac{\varphi^1}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos\varphi = \frac{\varphi^0}{0!} - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots$$

Ungerade und Gerade Zahlen lassen sich per Definition über $2{\cdot}k(+1)$ darstellen:

$$\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{i{\cdot}\varphi^n}{n!} = \frac{i{\cdot}\varphi^{2k}}{2k!} + \frac{i{\cdot}\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{i{\cdot}\varphi^{2k}}{2k!} + \frac{i{\cdot}(i^{2k}{\cdot}\varphi^{2k+1})}{(2k+1)!}$$

Restliche Herleitung fehlt...

12 Deute die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen, einer imaginären, einer Komplexen Zahl geometrisch. Leite daraus die Regel von Moivre her.

Auf Notizzettel notiert.

reelle Zahl Der Zeiger wird um den Faktor (reelle Zahl) verlängert

imaginäre Zahl Der Winkel wird verändert, die Länge des Zeigers nicht

Komplexe Zahl trigonometrische Form, Additionstheoreme, Satz von de Moivre

13 Erkläre Logarithmus, Wurzeln und Potenzen in Bezug auf Komplexe Zahlen

Potenzen Satz von de Moivre

Wurzeln $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}{\cdot}e^{i\cdot\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$

Logarithmus mehrdeutig, Definition von Streifen, Hauptwert

14 Welche Rechenoperationen sind im Bereich der Komplexen Zahlen definiert?

Die meisten Rechenoperationen lassen sich von den reellen Zahlen auch auf die Komplexen Zahlen übertragen. Jedoch gestaltet es sich oft schwieriger und nicht immer wäre die Arbeit mit Komplexen Zahlen zielorientiert. Mir bekannt sind die folgenden Rechenoperationen mit Komplexen Zahlen:

- Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division)
- Invertierung, Neutralisierung
- Logik (Junktoren/Boolsche Operationen; und, oder, nicht)
- Erweitert (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen)

15 Gelten alle Rechenregeln der reellen Zahlen auch im Komplexen Zahlbereich?

Da die reellen Zahlen eine Untermenge der Komplexen Zahlen sind, gelten alle Rechenregeln der reellen Zahlen in einem Teil des Komplexen Zahlenbereichs. Die Frage wäre konkreter: Gelten alle Rechenregeln der reelen Zahlen auch im gesamten Komplexen Zahlenbereich?

Nein, zumindest funktionieren sie nicht immer analog, wie wir beim Logarithmus gesehen haben.

16 Wo finden Komplexe Zahlen Anwendung?

Mathematik Verbindung von Trigonometrie und Exponentialfunktionen (siehe Fourier-Reihen), Funktionentheorie

Physik/Elektrotechnik Darstellung der Wechselspannung als komplexe Größe, dadurch einfachere Rechenwerkzeuge

17 Welche Rolle spielen Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik?

Zur Beschreibung von Wechselgrößen und Zeigern in Sinusschwingungen. (siehe voriger Punkt bzw Kapitel 5.1)

18 Gibt es eine Ordnung im Bereich der Komplexen Zahlen? Argumentiere.

Wie schon erwähnt: Nein. Als Argumentation beweist man gerne, dass weder $i > 0$ noch $i < 0$ gelten kann.

Wir nehmen an, dass $i > 0$ gilt.

$$i > 0$$
$$i \cdot i > 0 \cdot i$$
$$-1 > 0$$

Wir haben das Gegenteil bewiesen. Also nehmen wir einmal das Gegenteil ($i < 0$) an:

$$i < 0$$
$$i \cdot i \geq 1$$
$$-1 \geq 1$$

In der dritte Zeile musste ich das Relationszeichen invertieren, da wir angenommen haben, dass $i < 0$ ist und bei Ungleichung eine Division durch eine negative Zahl dadurch passiert, dass man auch das Relationszeichen invertiert.

Letztendlich kommen wir nicht drum herum zu sagen, dass wir die Größe der imaginären Einheit nicht kennen. Damit haben Komplexen Zahlen keine Ordnung.